

3) Reduction simultanée

Dev 1

Thm E R-ev de dim n . On suppose que $q_1, q_2 \perp q_1$.

On suppose que q_1 est DP. Alors $\exists B$ base de E t_g $\text{mat}_B q_1 = I_n$
et $\text{mat}_B q_2 \in D_n(\mathbb{R})$. (diagonale)

$$\text{ix} \quad q_1(x) = {}^t x I_n x = \sum x_i^2$$
$$q_2(x) = {}^t x D x = \sum \lambda_i x_i^2.$$

Démo: q_1, q_2 les formes polaires.

q_1 est DP $\Rightarrow q_1$ est un p.s.

$\Rightarrow E$ euclidien

$\Rightarrow \exists B$ base $B = (e_1, \dots, e_n)$ pour q_1 .

$\Rightarrow \text{mat}_B q_1 = I_n$.

Soit $A = \text{mat}_B q_2 \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Donc par thm spectral, A est ortho DZ

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists D \in D_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^t P A P$$

$$\Rightarrow D = {}^t P A P \text{ et } I_n = {}^t P I_n P$$

En notant B' la base obtenue à partir de la base B par P ,
d'après les formules de changement de base pour les q_i ,

$$D = \text{mat}_{B'} q_2 \text{ et } I_n = \text{mat}_{B'} q_1.$$



Application Soit $M_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M_1 = P^t P$ et $M_2 = P D^t P$.

Démo: $E = \mathbb{R}^n$

En effet, $q_1(u) = {}^t u M_1 u$
 $q_2(u) = {}^t u M_2 u$ $\exists q$ sur E avec q_1, q_2 DP

D'après thm précédent, $\exists B$ base tq $\text{mat}_B q_1 = I_n$ et $\text{mat}_B^D q_2 \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

On note $P = \text{mat}_{B_0 \rightarrow B} \in GL_n(\mathbb{R})$ et d'après formule de chg de base:

$$\begin{cases} I_n = {}^t P M_1 P \\ D = {}^t P M_2 P \end{cases}$$

Puis $M_1 = ({}^t P)^{-1} P^{-1}$ $M_2 = ({}^t P)^{-1} D P^{-1}$

En posant $Q = ({}^t P)^{-1}$ on a: $M_1 = Q Q^t$ et $M_2 = Q D^t Q$.

Application Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\det A + \det B \leq \det(A+B)$

Démo: En effet, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = P^t P$ et $B = {}^t P D P$

$$\Rightarrow A+B = P(I_n + D)^t P$$

$$\Rightarrow \det(A+B) = (\det P)^2 \det(I_n + D)$$

$$\begin{aligned} \det A + \det B &= \det(P)^2 + \det(P)^2 \det(D) \\ &= (\det P)^2 (\det I_n + \det D) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Il suffit de mg $\det(I_n + D) \geq \det(D) + 1 \Rightarrow$ puis $x \geq 0$.

Soit $D = (d_1, \dots, d_n)$ diag vp de D

$\exists q$ f.g. ass à B dans $B_1 \Rightarrow q$ DP

$P: \text{mat}_{B_1 \rightarrow B_2}$

$\exists q$ f.g. ass à B dans B_2 .

~~on a~~ $\Rightarrow D \in \mathcal{S}_n^{++}$

$$\Rightarrow d_i > 0.$$

Puis

$$\begin{aligned} 1 + d_1 + \dots + d_n \\ \leq (1+d_1) \dots (1+d_n) \end{aligned}$$